I) Réduction pratique

Exercice 1: ★ *b.7.1*

Trigonaliser ou diagonaliser si cela est possible, en précisant les matrices de passage :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2: ★ *b.7.23*

Soit $M = \begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & & (b) \\ & & \ddots & \\ & (b) & & \ddots \\ & & & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour $a, b > 0$.

1. Calculer χ_M.
2. M est est-elle diagonalisable ?
3. Calculer π_M.
4. Calculer $\det(I_n + M)$.

Exercice 3: ★ *b.7.80*

Donner le rang de la matrice complexe $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$. A quelle(s) condition(s) est-elle diagonalisable ? Traiter ensuite le cas où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4: ★ *x.red.42*

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(R, R)$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Exercice 5: ★ *x.red.45*

Soient $E = \mathcal{C}^0(R, R)$ et I l'endomorphisme de E qui à f associe sa primitive qui s'annule en 0. Déterminer les valeurs propres de I.

Exercice 6: ⋆ *x.red.52*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A de façon simple. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7: ⋆ *x.red.87*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi_A(M) = AM$.

1. Montrer que les valeurs propres de Φ_A sont les valeurs propres de A.
2. Déterminer les valeurs propres de $\Psi_A : M \mapsto MA$.

Exercice 8: ⋆ *x.red.91*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
3. B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
4. B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Exercice 9: ⋆ *x.red.105*

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10: ⋆ *x.red.129*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = P - (X+1)P'$.

1. Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ. Est-il diagonalisable ?

Exercice 11: ⋆⋆ *b.7.2*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & (\operatorname{Tr} A)M - (\operatorname{Tr} M)A \end{cases}$$

est un endomorphisme dont on donnera le noyeau et l'image. En donner les éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 12: ★★ *b.7.6*

On considère $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On note ϕ_A qui à $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par $X^n - 1$.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que ϕ_A est diagonalisable et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

Exercice 13: ★★ *b.7.7*

On considère la matrice $M = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer l'ordre de nilpotence de $M - I_{n+1}$.
3. Calculer M^{-1}.

Exercice 14: ★★ *b.7.8*

On considère la matrice $M = (\delta_{i+j,n+1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\det M$.
2. Montrer que M est diagonalisable, déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

Exercice 15: ★★ *b.7.107*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $u(X) = AX - XB$.

1. Montrer l'équivalence entre :
   - $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$
   - $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   - u est injective
   - u est bijective
2. Montrer que si α est une valeur propre de A et β une valeur propre de B, $\alpha - \beta$ est une valeur propre de u.
3. Soit λ une valeur propre de u. Montrer que $\lambda = \alpha - \beta$, où $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$.
4. Déterminer le spectre de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $X \mapsto AX - XB$.

Exercice 16: ★★ *b.7.109*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(v) = v \circ u - u \circ v$.

1. On suppose que u est nilpotent. Montrer que ϕ est nilpotent.
2. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que ϕ est diagonalisable.
3. Etudier les réciproques.

Exercice 17: ★★ *x.red.43*

Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n) & \longmapsto & (v_n), \text{ où} \left\{\begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$. Déterliner les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 18: ★★ *x.red.80*

Matrices stochastiques.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $i, j \in [\![1\,,n]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]\,, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A et vérifie $|\lambda| = 1$ alors il existe $d \in \mathbb{N}^*, \lambda^d = 1$

Exercice 19: ★★ *x.red.101*

Soient $a, b, c \in (\mathbb{R}^*)^3$. Etudier la diagonalisabilité de la matrice réelle :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20: ★★ *x.red.153*

1. Déterminer l'ensemble Ω des réels a tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

2. Pour $a \in \Omega$, trouver P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 21: ★★ *x.red.211*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ déterminé par

$$\Phi(M) = AM - MB \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Soient α une valeur propre de A et β une valeur propre de B. Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de Φ.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A quelle condition la matrice $\chi_A(M)$ n'est-elle pas inversible ?
3. Soit λ une valeur propre de Φ. Montrer qu'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que $\lambda = \alpha - \beta$.

II) Etude théoriques des éléments propres

A) Exemples et contre-exemples

Exercice 22: ★ *h.4.21, h.4.22*

Trouver un endormorphisme non diagonalisable, puis un endomorphisme non diagonalisable.

Exercice 23: ★★ *h.4.18*

Trouver un endormorphisme de $\mathbb{C}[X]$ qui n'admet aucune valeur propre.

Exercice 24: ★★ *h.4.17*

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables. Trouver $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\mathbb{K} = \mathrm{Sp}(u)$.

Exercice 25: ★★ *h.4.26, h.4.27*

Trouver deux matrices A et B diagonalisables telle que $A+B$ ne soit pas diagonalisable. Faire de même avec le produit.

B) Exercices

Exercice 26: ★ *b.7.10*

Existe-t-il une forme linéaire Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A) \in \mathrm{Sp}(A)$?

Exercice 27: ⋆ *x.red.26*

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer

$$0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff f \text{ surjectif}$$

Exercice 28: ⋆ *x.red.28*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Etablir

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Exercice 29: ⋆ *x.red.79*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,js}|$$

Montrer que

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$$

Exercice 30: ⋆⋆ *b.7.9*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,, n]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1\,, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1. Montrer que 1 est valeur propre et que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.
2. On suppose dans cette question que pour tout (i, j), $a_{i,j} > 0$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M sur le cercle unité.
3. Soit λ une valeur propre de A de module 1. Montrer qu'il existe $m \in [\![1\,, n]\!]$ tel que $\lambda^m = 1$.

Exercice 31: ⋆⋆ *b.7.26*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. On suppose $\det(f) \neq 0$ et f^2 diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et en déduire que f est diagonalisable.
2. Dans le cas général, montrer que : f est diagonalisable *si et seulement si* f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
3. Qu'en est-il si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 32: ★★ *b.7.27*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que B soit diagonalisable et $AB^3 = B^3A$. Montrer que $AB = BA$. Proposer une généralisation.

Exercice 33: ★★ *b.7.45*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ O & 3A \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A est diagonalisable *si et seulement si* B l'est.

Exercice 34: ★★ *b.7.47*

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $A \neq 0$ et $AB = BA$. Trouver une CNS pour que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 35: ★★ *x.red.31*

Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

1. Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.
2. Pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose
$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$$
ce qui définit des endomorphismes de E. Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.
3. Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$ si l'espace E est de dimension finie.

Exercice 36: ★★ *x.red.218*

Montrer qu'une matrice de permutation est diagonalisable.

Exercice 37: ★★ *x.red.251*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Les endomorphismes p et q sont-ils diagonalisables ? Co-diagonalisables ?

Exercice 38: ★★ *x.red.254*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(u)$ soit diagonalisable et que pour tout z racine de P', $P(z) \notin$

$\mathrm{Sp}(P(u))$.
Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 39: ★★ *x.red.254*

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = A^p$.
Montrer que A est diagonalisable *si et seulement si* B l'est.

Exercice 40: ★★★ *b.7.17*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres (complexes) sont de modulo au plus 1.

1. Montrer que $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$ et que $\mathrm{Tr}(A^k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les valeurs propres non-nulles de A sont de module 1, puis que ce sont des racines de l'unité.
3. Exhiber $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{U}_n$.

Exercice 41: ★★★ *b.7.102*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

1. Montrer que les λ_i sont les valeurs propres de A avec multiplicité.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$. Les matrices A et B sont-elles semblables ? Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 42: ★★★ *x.red.75*

Montrer que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre en commun *si et seulement si* il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non-nulle vérifiant $UA = BU$.

III) Sous-espaces stables

Exercice 43: ★ *x.red.7*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que l'espace $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.
2. Pour $x \in \mathrm{Im}\, u$, calculer $u^2(x)$.
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$. Montrer que v est un isomorphisme.
4. En déduire que le rang de u est pair.

Exercice 44: ★ *x.red.10*

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose, pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. T est-il un automorphisme de E ?
2. Existe-t-il un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et stable par T ?

Exercice 45: ★★ *x.red.11*

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite magique s'il existe un réel s vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!]\,, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s \text{ et } \forall j \in [\![1\,,n]\!]\,, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s$$

On note U la colonne $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est magique *si et seulement si* il existe des réels λ et μ vérifiant

$$AU = \lambda U \text{ et } U^\top A = \mu U^\top$$

   Que dire alors des réels λ et μ ?
2. Soient $D = \mathrm{Vect}(U)$ et $H = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), U^\top X = 0\}$. Pourquoi sont-ils supplémentaires ?
3. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique *si et seulement si* elle laisse stable les espaces D et H.
4. En déduire la dimension de l'espace des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 46: ★★ *b.7.53*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; on note μ_f son polynôme minimal.

1. Soit P un diviseur de μ_f dans $K[X]$. Expliquer qu'il existe $v \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $P(f)(v) = 0_E$.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable.

Exercice 47: ★★★ *b.7.57*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer que si u est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.
2. Montrer que u est diagonalisable *si et seulement si* tout sous-espace F de E

admet un supplémentaire stable par u.

3. Montrer l'équivalence entre :
   - ◁ Tout F sous-espace vectoriel de E stable par u et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins un vecteur propre.
   - ◁ χ_u est scindé.
4. On suppose χ_u scindé. Montrer que u est diagonalisable *si et seulement si* tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 48: ★★★ *b.7.58*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre :

- ◁ χ_f est irréductible.
- ◁ Les seuls sous-espaces vectoriels stables par f sont E et $\{0_E\}$.

Exercice 49: ★★★ *b.7.63*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \mathrm{id}$. Montrer que u est diagonalisable. Quelle est la nature de $\dfrac{u + \mathrm{id}}{2}$?
2. Montrer que le cardinal d'une famille d'endomorphismes distincts tels que $u^2 = \mathrm{id}$ et commutant deux-à-deux est majoré par une constante que l'on déterminera.
3. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ tel que pour tout $g \in G, g^2 = \mathrm{id}_E$. Montrer que G est abélien et que son cardinal est une puissance de 2. Quel est le cardinal maximal d'un tel sous-groupe ?
4. Montrer que si $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont isomorphes, alors $n = m$.

Exercice 50: ★★★ *x.red.13*

Soit $D : P \mapsto P'$ l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$. Existe-t-il un endomorphisme Δ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta^2 = D$?

IV) Polynômes et similitude

Exercice 51: ★ *b.7.33*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Exercice 52: ⋆ *b.7.36*

Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 53: ⋆ *b.7.41*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Etudier la parité du polynôme caractéristique χ_A. Montrer que si n est impair alors $\det A = 0$.

Exercice 54: ⋆ *b.7.90*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 55: ⋆ *x.red.59*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique χ_A. Etablir que pour tout $x \neq 0$,

$$\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{X^n}{\chi_A(0)} \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$$

Exercice 56: ⋆ *x.red.60*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_{A\overline{A}} \in \mathbb{R}[X]$$

Exercice 57: ⋆⋆ *b.7.32*

Soient E un un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme minimal et p l'exposant de X dans sa décomposition en irréductibles.

1. Si $p = 0$ que peut-on dire de u ?
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.
3. Montrer que le projecteur sur $\mathrm{Ker}\, u^p$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, u^p$ est un polynôme en u.
4. Montrer que $p = \min\{k \in \mathbb{N}, \mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^{k+1}\}$.

Exercice 58: ⋆⋆ *b.7.60*

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension n. Démontrer l'équivalence entre :

- ⊲ $(\mathrm{id}, u, \ldots, u^{n-1})$ est une famille libre.
- ⊲ Il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une famille libre.

Est-ce toujours vrai si u n'est pas diagonalisable ?

Exercice 59: ★★ *b.7.100*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $uv - vu = u$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k v - vu^k$. En déduire que u est nilpotent.
2. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun, puis qu'ils sont cotrigonalisables.
3. Montrer le même résultat dans le cas $uv - vu \in \operatorname{Vect}(u, v)$.

Exercice 60: ★★ *b.7.101*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Etudier l'équivalence entre :

- A est diagonalisable.
- $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in \mathcal{N} \Rightarrow P(A) = 0$.

Exercice 61: ★★ *b.7.98*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E tels que $uv = vu$ et v est nilpotente. Montrer que $\chi_{u+v} = \chi_u$. Qu'en est-il pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 62: ★★ *x.red.62*

Soient $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ endomorphisme de rang 2.
Exprimer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\operatorname{Tr}(f)$ et $\operatorname{Tr}(f^2)$.

Exercice 63: ★★ *x.red.67*

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^*$ deux-à-deux distincts. On pose

$$P(X) = \det(A + XI_n) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $P(a_i)$.
2. Justifier que P est un polynôme unitaire de degré n.
3. Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle
$$\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)}$$
4. En déduire le déterminant de $A + I_n$.

Exercice 64: ★★ *x.red.256*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que 0 soit la seule valeur propre de A.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ commutant avec A. Calculer $\det(A + M)$.
4. Inversement, quelles sont les matrices A vérifiant :

$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), AM = MA \Longrightarrow \det(A + M) = \det(M)$$

Exercice 65: ★★★ *b.7.61*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$, on note $E_x = \mathrm{Vect}(u^k(x))_{k\in N}$ et $I_x = \{P \in \mathbb{R}[X], P(u)(x) = 0\}$.

1. Montrer que I_x est l'ensemble des multiples d'un unique polynôme unitaire μ_x.
2. Montrer que E_x est stable par u, et comparer μ_x au polynôme caractéristique de l'endomorphisme de E_x induit par u.
3. On admet qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$. Montrer que $\chi_u = \mu_u$ *si et seulement si* il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible. Montrer que P divise χ_u *si et seulement si* P divise μ_u.

Exercice 66: ★★★ *b.7.62*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(f)(x), P \in \mathbb{C}[X]\}$.

1. On suppose que u est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par u est cyclique.
2. Montrer que $I \mapsto \{Q(u)(x), Q \in I\}$ réalise une correspondance bijective entre les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ contenant P et les sous-espaces stables de E stables par u.
3. Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E stables par u est fini.
4. Réciproquement, montrer que si l'ensemble des sous-espaces de E stables par u est fini, alors u est cyclique.

Exercice 67: ★★★ *x.red.206*

1. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$u^{-1} = Q(u)$$

2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(2X)$. Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses éléments propres. Existe-t-il

$Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$u^{-1} = Q(u)$$

V) Applications diverses

Exercice 68: ★ *x.red.113*

Calculer A^n pour
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 69: ★ *x.red.117*

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 + M = A$. Justifier que $P^{-1}MP$ est diagonale.
3. Déterminer les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 70: ★ *x.red.244*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + I_n = O_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 71: ★★ *b.7.73*

Soit $P = (n+1)X^{n+1} - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} X^j \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que toutes les racines de P sont simples et de module inférieur à 1. Quelles sont les racines de P de module 1 ?
2. Soit u définie par $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{p+n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_{p+j}$.

   Déterminer la limite de u.

Exercice 72: ★★ *b.7.75*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trigonaliser A.
2. Résoudre $X^n = A$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 73: ★★ *b.7.84*

Soient u et v deux endomorphismes qui commutent, u ayant n valeurs propres distinctes (avec $\dim E = n$).

1. Montrer que u et v sont codiagonalisables.
2. Montrer que le commutant de u est $\mathbb{R}[u]$ et en déduire qu'il est de dimension n.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P(M)$.

Exercice 74: ★★ *x.red.123*

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} & = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) ces trois suites sont-elles convergentes ?

Exercice 75: ★★ *x.red.187*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G stables par u.
Etablir que $\Pi_u = \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G}$ (en notant Π_v le polynôme minimal d'un endomorphisme v).

Exercice 76: ★★ *x.red.278*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P pour lesquels la matrice $P(A)$ est nilpotente.

Exercice 77: ★★★ *b.7.93*

Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à $2M$?

Exercice 78: ★★★ *x.red.168*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module < 1.